جامعة البعث
كلية العلوم
قسم الرياضيات
السنة الثانية

البنى الجَّبريِّة (2)

المحاضرة النظرية الأولى (التمهيدية)

إعداد : داني محفوض

مقدِّمة المادة ...

البنى الجبرية (2) – مقرَّر فصل ثاني – لطلاب السنة الثَّانية

إكمالاً لعملنا في مواضيع الجبر المجرد عموماً .. و البنى الجبرية على وجه الخصوص , لكونها مدخلاً أساسياً في دراسة الجبر المجرد .. وُضِعَ مُقرَّر البنى الجبرية (2) لِنَدرُسَ فيهِ النَّوع الثاني من حيث الأهمية من أنواع البنى الجبرية .. ألا و هو .. ***الحلقات*** ..
حَيثُ كما وجدنا في مُقرَّر البنى الجبرية (1) كانت دراستنا ترتكزُ حول نظرية الزُّمر ..

قبلَ أن نبدأ بدراسة مفهوم الحلقة ..
وضعنا هذهِ المقدمة كي نجيبُ فيها على بعضَ التساؤلات التي قد تخطر في ذهن الزميل القارئ ..

أوَّل ما قد يتبادر لذهن الطالب الذي أوشكَ على دراسة مادة البنى الجبرية (2) هو السؤال التالي :
في حال كانَ أساسي ضعيفاً في مادة البنى الجبرية (1) , هل يمكنني الخوض بدراسة البنى الجبرية (2) ؟
رُغمَ صعوبة الإجابة على هذا التساؤُل .. حيثُ يختلف الجواب تبعاً لاختلاف مدى تعمُّق كل طالب في دراسة البنى (1) .. سنقوم بطرح الإجابة بشكل عام .. أي وفقاً لما يجب أن يكون بحوزة الطالب من معلومات و مهارات قد اكتسبها مسبقاً ليبدأ بدراسة البنى (2) , (أي ليبدأ بدراسة مفهوم الحلقة).
إن المبادئ الأساسية الواجب توفرها ليتم ذلك .. تبدأ بامتلاك الطالب لمفهوم الزمرة شاملاً و بكل ما يحويه من مفاهيم جزئية (**البنية الجبرية – قانون التشكيل الداخلي – العنصر النظير لعنصر من بنية جبرية – العنصر المحايد في بنية جبرية – قانون التشكيل التجميعي و قانون التشكيل التبديلي**) ..
وَ انطلاقاً من وجوب وَ أهمية إتقان الطالب لهذه المفاهيم قبلَ أن يبدأ بدراسة مفهوم الحلقة .. سنُخصِّص الجزء الأوَّل من هذه المحاضرة لإعادة شرح هذه المفاهيم وَ توضيحُها بشيءٍ منَ التفصيل معَ الأمثلة .

طبعاً ذلكَ لا يعني الاكتفاء بهذِهِ المفاهيم حتى يتمكن الطالب من الخوض بأعماق البنى (2) .. بكل سلاسة و سهولة .. !!!
حيثُ يحوي مُقرَّر البنى (1) في فصلهِ الأول (نظريات المجموعات) على الكثير من المفاهيم التي تدخل و بعمق بجذور ما تناولناه في بقية فصول البنى (1) .. و ما سنتناولهُ في البنى (2) .. !! فلا شك بوجوب عودة الطالب إلى مقرّر البنى (1) و دراسته من فصوله الأولى .. بالتزامن مع دراسته لمادة البنى (2) و ذلكَ لن يكونَ بالأمرِ الصعب .. لطالما أراد الطالب ذلك بعزيمة وَ إصرار ! ..

فأما ما ذكرناهُ في الأعلى من مفاهيم (**مفهومُ الزمرة – و ما يحوي من مفاهيم جزئية أساسية أخرى**) .. فتفي بغرض الدخول بمفهوم الحلقة ..
و عموماً .. في المحاضرات القادمة (ما بعدَ الأولى) .. سنسعى جاهدين لتوضيح أي فكرة مهما كانَت بسيطة تمَّ تناولُها في البنى (1) و نحتاجها لفهم موضوع أو فقرة أو مفهوم أو تمرين ما في البنى (2) ..
فيما يخص المصدر الرئيسي لدراسة مادة البنى (2) :
الكتاب المقرر متواجد بمستودع كلية العلوم بالطابق الأرضي , اسم المقرر : البنى الجبرية (2) ..
للدكتور حمزة حاكمي و الدكتور يوسف الوادي ..
كما يتواجد الأجزاء المطالبين بها فقط ! من هذا الكتاب مصوَّرة بمكتبة كلية العلوم ..
ختاماً يُنصَح و بشدة متابعة المادة خلال الفصل الدراسي .. و عدم تركها لقبل الامتحان ..
و عدم الاعتماد على الملخصات و بصم الدورات !!!!
رَاجينَ من المولى التوفيق لزملائنا الكرام .. .. دَاني مَحفُوض ..

لنبدأ ..

كما قلنا في المقدمة .. سنقوم بدايةً بالتذكير بمفهوم الزمرة بشيءٍ من التفصيل ..

تذكرة بمفهوم الزمرة :

ما معنى (***زمرة***) ؟ ..... ما هوَ أوَّل ما يجب أن يتبادر لأذهاننا فور سماعنا لهذا الاصطلاح ؟

إنَّ أوَّل ما يجب أن يتبادر لأذهاننا فور سماعنا لهذا المصطلح .. هو (المجموعة) !!

هل ذلكَ يعني أنَّ الزُّمرة هي مجموعة ؟ .. نعم .. هذا صحيح ..

وَ لَكن !! .. بكل تأكيد ليست أي مجموعة هي زمرة !! ..

ذلك ما يعني أنَّ هناك مجموعة منَ الشروط الواجب توفرها بالمجموعة حتى تكون زمرة ..

ما هيَ هذهِ الشروط ؟ ..

تبدأ هذه الشروط بالشرط التالي : أن تكون هذه المجموعة هي ***بنية جبرية*** ..

قبلَ أن نعرف بقية الشروط .. لنتوقف قليلاً و نذكِّر بمعنى ***بنية جبرية*** ..

ما معنى ***(بنية جبريَّة)*** ؟ ..

البنية الجبرية هي أي مجموعة مُعرَّف عليها **قانون تشكيل داخلي** واحد على الأقل .

ما معنى (قانون تشكيل داخلي) ؟

لتكن لدينا G مجموعة غير خالية .

نسمي كل (تابع) تطبيق $G \times G \to G$, أي التطبيق الذي منطلقهُ مجموعة الجداء الديكارتي للمجموعتين : (المجموعة الأولى هيَ G , و المجموعة الثانية هيَ G نفسها ,) , و مُستقرَّهُ المجموعة G نفسها , قانون تشكيل داخلي على المجموعة G . نرمز لهذا القانون عادةً بالرمز (.) إذا كانَ القانون ضربياً وَ (+) إذا كانَ جمعياً .

وَ من أجل التبسيط .. يمكن أن نفهم كما يلي :

قانون التشكيل المعرَّف على عناصر مجموعة غير خالية هو عبارة عن عملية معرفة على عناصر هذه المجموعة , و يكون هذا القانون داخلياً (العملية داخلية) إذا كانَ حاصل تشكيل (أي إجراء العملية) بينَ أي عنصرين من عناصر هذه المجموعة غير الخالية هو عنصر من عناصر هذه المجموعة , و في هذه الحالة نقول أنَّ المجموعة المعرَّف على عناصرها هذا القانون هي مجموعة مغلقة .

قبلَ أن نكمل بقية الشروط الواجب توافرها في مجموعة غير خالية حتَّى تكون زمرة , نطرح بعض الأمثلة عن مفهوم البنية الجبرية : فمثلاً إن مجموعة الأعداد الصحيحة مع العمليات (الجمع و الضرب و الطرح) هي بنية جبرية و ذلك لأنَّ كل من هذه العمليات هي عملية داخلية في مجموعة الأعداد الصحيحة .. و لكن ! هل مجموعة الأعداد الصحيحة مع عملية قسمة الأعداد الصحيحة تشكِّل بنية جبرية ؟ .. طبعاً لا .. لأنه ليس بالضرورة أن يكون حاصل قسمة أي عددين صحيحين هو عدد صحيح مثل $-1.5 = \frac{-3}{2}$, أي حاصل القسمة ليس عدد صحيح , و بالتالي عملية قسمة الأعداد الصحيحة هي عملية ليست داخلية في مجوعة الأعداد الصحيحة , لذلك مجموعة الأعداد الصحيحة مع عملية القسمة ليست بنية جبرية .

أمثلة أخرى :

- إنَّ مجموعة الأعداد الطبيعية مع عمليتي ضرب و جمع الأعداد الطبيعية تشكل بنية جبرية , لماذا ؟ (أجب بنفسك) .

- هل مجموعة الأعداد الطبيعية مع عملية طرح الأعداد الطبيعية تشكل بنية جبرية ؟ (أجب بنفسك) , لماذا ؟ (أجب بنفسك) .

- هل مجموعة الأعداد الطبيعية مع عمليتي طرح و جمع الأعداد الطبيعية تشكل بنية جبرية ؟ (أجب بنفسك) , لماذا ؟ (أجب بنفسك) .

إذاً : إنَّ أوّل شرط واجب توافرهُ في مجموعة غير خالية حتى تكون زمرة , هو أن تكون هذه المجموعة هي بنية جبرية ! .

و تبقى لدينا ثلاث شروط :

- يجب أن يكون قانون التشكيل الداخلي المعرف على عناصر هذه المجموعة (البنية الجبرية) **تجميعياً** .
(أي يجب أن تكون العملية الداخلية تجميعية) . أي مهما كانت العناصر الثلاث a وَ b وَ c من هذه المجموعة غير الخالية فإنَّ : $(a.b).c = a.(b.c)$

- يجب أن يكون في هذه المجموعة غير الخالية **عنصر حيادي** نرمز له بالرمز e , بحيث يحقق هذا العنصر ما يلي :
حاصل تشكيل العنصر الحيادي مع أي عنصر آخر من عناصر المجموعة (البنية الجبرية) من اليمين يساوي حاصل تشكيل العنصر الحيادي مع هذا العنصر الآخر من اليسار وَ يساوي هذا العنصر الآخر .
أي : أي مهما كانت العنصر a من هذه المجموعة غير الخالية فإنَّ : $a.e = e.a = a$

- يوجد لكل عنصر من عناصر هذه المجموعة (البنية الجبرية) عنصر مقلوب لهُ .
ملاحظة : إذا كان قانون التشكيل ضربياً فنقول (عنصر مقلوب لعنصر) و نرمز حينها لمقلوب العنصر a بالرمز a^{-1} , وَ إذا كان قانون التشكيل جمعياً فنقول (عنصر نظير لعنصر) و نرمز حينها لنظير العنصر a بالرمز $-a$.

ما معنى العنصر a^{-1} مقلوب لعنصر a (إذا كان القانون ضربياً أو العنصر a^{-1} نظير للعنصر a إذا كانَ جمعياً) ؟

أي أنَّ حاصل تشكيل العنصر a مع العنصر a^{-1} **(إذا كان القانون ضربياً وَ $-a$ إذا كانَ جمعياً)** هو العنصر الحيادي e .

خلاصة مفهوم الزمرة :

الزمرة هي عبارة عن بنية جبرية (مجموعة معرف على عناصرها قانون تشكيل داخلي) وَ القانون المعرف على عناصرها تجميعي , وَ فيها لكل عنصر من عناصرها عنصر مقلوب **وحيد** (أو نسميه نظير إذا كان القانون تجميعي) لهُ بالنسبة للقانون (العملية) المعرف على عناصر هذه البنية , و هناك عنصر محايد **وحيد** في هذه البنية بالنسبة للقانون المعرف على عناصرها .

إذا قمنا بتشكيل العنصر المحايد الوحيد e مع أي عنصر آخر من عناصر هذه المجموعة فسيكون الناتج هو هذا العنصر الآخر نفسهُ , و إذا قمنا بتشكيل أي عنصر من عناصر هذه البنية مع العنصر المقلوب الوحيد (أو نسميه نظير إذا كان القانون تجميعي) لهُ سيكون الناتج هو العنصر الحيادي .

أمثلة عن الزمرة ..

مثال (1) : إنَّ مجموعة الأعداد الحقيقيَّة R مع عملية جمع الأعداد الحقيقية تشكل زمرة , و نرمز لذلك بالرمز $(R\ ,+)$. و ذلك لأن عملية جمع الأعداد الحقيقية هي عملية داخلية في R , أي أن R مع عملية الضرب تشكل بنية جبرية .. هذا أولاً .. فأما ثانياً : عملية جمع الأعداد الحقيقية هي عملية تجميعية , و ثالثاً لكل عنصر (عدد حقيقي) هناك عنصر نظير بالنسبة لعملية الجمع (**فمثلاً : نظير 7 هو** -7 **وَ نظير** -108 **هو** $108\ =\ -(-108)$ **, و الخ ..)** , وَ رابعاً هناكَ عنصر محايد في مجموعة الأعداد الصحيحة بالنسبة لعملية الجمع و هو الصفر .

مثال (2) : هل مجموعة الأعداد الطبيعية مع عملية ضرب الأعداد الطبيعية تشكل زمرة ؟ **لماذا ؟ (أجب بنفسك) .**

مثال (3) : بيّن أنَّ مجموعة المصفوفات الحقيقية المربعة النظامية من المرتبة الثانية , تشكِّل مع عملية ضرب المصفوفات زمرة , من هو العنصر المحايد في هذه الزمرة ؟ **(أجب بنفسك) .**

في حال كُنتَ بحاجة إلى المزيد منَ الأمثلة , يمكن الرجوع إلى المحاضرتين الثالثة و الرابعة من مادة البنى الجبرية (1) , أو إلى كتاب البنى الجبرية (1) في الصفحة (79) .

نختم مراجعتنا للزمرة بالتذكير بمفهوم الزمرة التبديلية :

نقول عن الزمرة أنها تبديلية إذا كان قانون التشكيل الداخلي المعرف على عناصرها تبديلياً , أي إذا كانَ لدينا العنصرين a وَ b من زمرة , و كانَ $a\,.\,b = b\,.\,a$, عندها نقول أنَّ هذهِ الزمرة هي زمرة تبديلية .
فمثلاً عملية ضرب الأعداد الحقيقية هي عملية تبديلية , و لكن! هل عملية ضرب المصفوفات هي عملية تبديلية ؟ .....
تمرين : في الأمثلة الثلاث الواردة في أسفل الصفحة السابقة , بيّن أياً من هذه الزمر المذكورة هي زمر تبديلية .

و الآن باتَ بإمكاننا الخوض بدراسة مفهوم الحلقة ......

لقد درسنا في نظرية الزمر (البنى1) , مجموعات مزودة بعملية داخلية واحدة , و كنا نرمز لهذه العملية في بعض الأحيان بالرمز ($*$) أو ($+$) أو (.) , و الآن سوف ندرس مجموعات مزودة بقانوني تشكيل داخليين , و سوف نرمز لأحدها بالرمز ($+$) و للآخر بالرمز (.) , دون أن نعني بذلك أنها بالضرورة الجمع و الضرب العاديان ..
سوفَ نطلق على المجموعة المزودة بقانوني تشكيل داخليين (أحدهما ضربي و الآخر جمعي) اسم الحلقة , و ذلك إذا تحقق في هذه المجموعة (البنية الجبرية) مجموعة من الشروط سنذكرها فيما يلي ..

لتكن لدينا R مجموعة غير خالية معرف على عناصرها قانوني التشكيل الداخليين ($+$) وَ (.) ,
نقول حينها عن المجموعة R مع هذين القانونين أنها حلقة إذا تحقق ما يلي :

أولاً : فيما يخص القانون الجمعي ($+$) :

- قلنا من البداية أن هذا القانون هو قانون تشكيل داخلي .
- يجب أن يكون هذا القانون تجميعي على عناصر المجموعة R .
- يجب أن يكون لكل عنصر من عناصر المجموعة R عنصر نظير وفق القانون ($+$) .
- يجب أن يكون هناك عنصر محايد في المجموعة R وفقاً للقانون ($+$) .
- يجب أن يكون القانون الجمعي ($+$) تبديلياً على عناصر المجموعة R .

ثانياً : فيما يخص القانون الضربي (.) :

- قلنا من البداية أن هذا القانون هو قانون تشكيل داخلي .
- يجب أن يكون هذا القانون تجميعي على عناصر المجموعة R .
- ليس بالضرورة أن يكون لكل عنصر من عناصر المجموعة R عنصر نظير وفق القانون ($+$) .
- ليس بالضرورة أن يكون هناك عنصر محايد في المجموعة R وفقاً للقانون ($+$) .
- ليس بالضرورة أن يكون القانون الجمعي ($+$) تبديلياً على عناصر المجموعة R .

ثالثاً : فيما يخص القانون الضربي (.) وَ القانون الجمعي ($+$) :

يجب أن تكون العملية (.) توزعية على العملية ($+$) من اليمين و اليسار . أي.. مهما كانت العناصر الثلاث a و b و c من المجموعة R , فإن $a.(b+c) = a.b + b.c = (a+b).c$

خلاصة مفهوم الحلقة :

لاحظ في الفقرة أولاً من الشروط , يمكن أن نختصر البنود الخمسة بأن نقول :
المجموعة R مع القانون (+) تشكل زمرة تبديلية .

و لاحظ في الفقرة ثانياً من الشروط يمكن أن نختصر البنود الخمسة بأن نقول :
المجموعة R مع القانون (.) تشكل نصف زمرة (بنية تجميعية) .

إذاً : .....

لتكن لدينا R مجموعة غير خالية معرف على عناصرها قانوني التشكيل الداخليين (+) وَ(.)
, نقول حينها عن المجموعة R مع هذين القانونين أنها حلقة إذا حققت الشروط التالية :

1- $(R\ ,\ +)$ زمرة تبديلية
2- $(R\ ,\ .)$ نصف زمرة
3- العملية (.) توزيعية على العملية (+) من اليمين و من اليسار .

نرمز للحلقة التي مجموعتها R و قانوني تشكيلها الداخليين هما (+) وَ(.) بالرمز :

$$(\boldsymbol{R}\ ,.\,,+)$$

ملاحظة : نسمي العنصر الحيادي في الزمرة $(R\ ,\ +)$ صفر الحلقة , و نرمز له بالرمز 0 .

نقول عن الحلقة $(\boldsymbol{R}\ ,.\,,+)$ أنها تبديلية إذا كانت العملية (.) تبديلية .

نقول عن الحلقة (R,.,+) أنها حلقة واحدية إذا حوت عنصر حيادي بالنسبة للعملية (.) , و الذي سنرمز له بالرمز 1 , و سوف ندعوه بواحد الحلقة , و هذا يعني أن عنصر الواحدة يحقق الشرط التالي : لكل عنصر a من هذه الحلقة سيكون : a . 1 = 1 . a = a

نتوقف في هذه المحاضرة عند ختام مفهوم الحلقة .. و سنبدأ ببداية المحاضرة القادمة بدراسة أمثلة مفصلة عن هذا المفهوم .... انتهت المحاضرة .... داني محفوض ....